Мысал 1.

Келесі сингулярлы ауытқыған дифференциалдық теңдеуді қарастырайық:

$$\varepsilon^2 y''' + 3\varepsilon y'' + 2y' = 2, \tag{1.1}$$

$$y(0,\varepsilon) = \alpha,\ y'(0,\varepsilon) = \beta,\ y(1,\varepsilon) + \int_0^1 [y(x,\varepsilon) - y'(x,\varepsilon)]dx = \gamma \tag{1.2}$$

мұндағы

$$A(t) = 3, B(t) = 2, F(t) = 2, a_0(x) = 1, a_1(x) = -1.$$

Берілген сингулярлы ауытқыған дифференциалдық теңдеудің іргелі шешімдер жүйесін іздейміз:

$$\varepsilon^2 \lambda^2 + 3\varepsilon\lambda + 2 = 0$$

Келесі қосымша сипаттаушы теңдеу құрамыз:

$\mu^2 + 3\mu + 2 = 0,$ теңдеудің түбірлері $\mu_1 = -1, \mu_2 = -2$

Берілген есепке сәйкес біртекті дифференциалдық теңдеудің іргелі шешімдер жүйесі келесі сипатта болады:

$$y_1(t,\varepsilon) = e^{-\frac{t}{\varepsilon}}, y_2(t,\varepsilon) = e^{-\frac{2t}{\varepsilon}}, y_3(t,\varepsilon) = 1 \tag{1.3}$$

(1.3) формуланы пайдалана отырып (1.1),(1.2) сингулярлы ауытқыған дифференциалдық теңдеудің шешімінің формуласын аламыз:

$$y(t,\varepsilon) = C_1 e^{-\frac{t}{\varepsilon}} + C_2 e^{-\frac{2t}{\varepsilon}} + C_3 + t$$

Есеп шешімінің туындылары келесі сипатта болады:

$$y'(t,\varepsilon) = -\frac{C_1}{\varepsilon} e^{-\frac{t}{\varepsilon}} - \frac{2C_2}{\varepsilon} e^{-\frac{2t}{\varepsilon}} + 1$$

$$y''(t,\varepsilon)=-\frac{C_1}{\varepsilon^2}e^{-\frac{t}{\varepsilon}}-\frac{4C_2}{\varepsilon^2}e^{-\frac{2t}{\varepsilon}}$$

Белгісіз коэффициенттерін (1.2) шартты пайдалана отырып іздейміз:

$$C_1+C_2+C_3=\alpha$$

$$\frac{C_1}{\varepsilon}+\frac{2C_2}{\varepsilon}=1-\beta$$

$$C_1e^{-\frac{1}{\varepsilon}}+C_2e^{-\frac{2}{\varepsilon}}+C_3+1+\int_0^1[C_1e^{-\frac{x}{\varepsilon}}+C_2e^{-\frac{2x}{\varepsilon}}+C_3+x+$$
$$+\frac{C_1}{\varepsilon}e^{-\frac{x}{\varepsilon}}+\frac{2C_2}{\varepsilon}e^{-\frac{2x}{\varepsilon}}-1]dx=\gamma$$

Ықшамдай келе келесі сипаттағы теңдеулерді аламыз:

$$C_1+C_2+C_3=\alpha$$

$$C_1+2C_2=\varepsilon(1-\beta)$$

$$2C_1(1+\varepsilon-\varepsilon e^{-\frac{1}{\varepsilon}})+C_2(2+\varepsilon-\varepsilon e^{-\frac{2}{\varepsilon}})+4C_3=2\gamma-1$$

Бұдан $C_2-C_3=\varepsilon(1-\beta)-\alpha$, яғни $C_3=C_2-\varepsilon(1-\beta)+\alpha$.

Ал $C_1=\varepsilon(1-\beta)-2C_2$.

Жоғарыдағылардан алатын коэффициенттер төмендегідей сипатта болады:

$$C_1 = \varepsilon(1-\beta) - \frac{4\gamma - 2 - 8\alpha + 4(1-\beta)\varepsilon(1-\varepsilon+\varepsilon e^{-\frac{1}{\varepsilon}})}{2 - 3\varepsilon - \varepsilon e^{-\frac{2}{\varepsilon}} + 4\varepsilon e^{-\frac{1}{\varepsilon}}} =$$

$$= \frac{-4\gamma + 2 + 8\alpha - \varepsilon(1-\beta)(2-\varepsilon+\varepsilon e^{-\frac{2}{\varepsilon}})}{2 - 3\varepsilon - \varepsilon e^{-\frac{2}{\varepsilon}} + 4\varepsilon e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}$$

$$C_2 = \frac{2\gamma - 1 - 4\alpha + 2(1-\beta)\varepsilon(1-\varepsilon+\varepsilon e^{-\frac{1}{\varepsilon}})}{2 - 3\varepsilon - \varepsilon e^{-\frac{2}{\varepsilon}} + 4\varepsilon e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}$$

$$C_3 = \alpha - (1-\beta)\varepsilon + \frac{2\gamma - 1 - 4\alpha + 2(1-\beta)\varepsilon(1-\varepsilon+\varepsilon e^{-\frac{1}{\varepsilon}})}{2 - 3\varepsilon - \varepsilon e^{-\frac{2}{\varepsilon}} + 4\varepsilon e^{-\frac{1}{\varepsilon}}} =$$

$$= \alpha + \frac{2\gamma - 1 - 4\alpha - (1-\beta)\varepsilon^2 - \varepsilon^2(1-\beta)e^{-\frac{2}{\varepsilon}} + 2(1-\beta)\varepsilon^2 e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}{2 - 3\varepsilon - \varepsilon e^{-\frac{2}{\varepsilon}} + 4\varepsilon e^{-\frac{1}{\varepsilon}}} =$$

$$= \alpha + \frac{2\gamma - 1 - 4\alpha + (1-\beta)\varepsilon^2(1 + e^{-\frac{2}{\varepsilon}} - 2e^{-\frac{1}{\varepsilon}})}{2 - 3\varepsilon - \varepsilon e^{-\frac{2}{\varepsilon}} + 4\varepsilon e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}$$

$$y(t,\varepsilon)=\frac{-4\gamma+2+8\alpha-\varepsilon(1-\beta)(2-\varepsilon+\varepsilon e^{-\frac{2}{\varepsilon}})}{2-3\varepsilon-\varepsilon e^{-\frac{2}{\varepsilon}}+4\varepsilon e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}e^{-\frac{t}{\varepsilon}}+$$

$$+\frac{2\gamma-1-4\alpha+2(1-\beta)\varepsilon(1-\varepsilon+\varepsilon e^{-\frac{1}{\varepsilon}})}{2-3\varepsilon-\varepsilon e^{-\frac{2}{\varepsilon}}+4\varepsilon e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}e^{-\frac{2t}{\varepsilon}}+$$

$$+(\alpha+\frac{2\gamma-1-4\alpha+(1-\beta)\varepsilon^{2}(1+e^{-\frac{2}{\varepsilon}}-2e^{-\frac{1}{\varepsilon}})}{2-3\varepsilon-\varepsilon e^{-\frac{2}{\varepsilon}}+4\varepsilon e^{-\frac{1}{\varepsilon}}})+t,$$

$$y'(t,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{-4\gamma+2+8\alpha-\varepsilon(1-\beta)(2-\varepsilon+\varepsilon e^{-\frac{2}{\varepsilon}})}{2-3\varepsilon-\varepsilon e^{-\frac{2}{\varepsilon}}+4\varepsilon e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}e^{-\frac{t}{\varepsilon}}-$$

$$-\frac{2}{\varepsilon}\cdot\frac{2\gamma-1-4\alpha+2(1-\beta)\varepsilon(1-\varepsilon+\varepsilon e^{-\frac{1}{\varepsilon}})}{2-3\varepsilon-\varepsilon e^{-\frac{2}{\varepsilon}}+4\varepsilon e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}e^{-\frac{2t}{\varepsilon}}+1,$$

$$y''(t,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon^{2}}\cdot\frac{-4\gamma+2+8\alpha-\varepsilon(1-\beta)(2-\varepsilon+\varepsilon e^{-\frac{2}{\varepsilon}})}{2-3\varepsilon-\varepsilon e^{-\frac{2}{\varepsilon}}+4\varepsilon e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}e^{-\frac{t}{\varepsilon}}+$$

$$+\frac{4}{\varepsilon^{2}}\cdot\frac{2\gamma-1-4\alpha+2(1-\beta)\varepsilon(1-\varepsilon+\varepsilon e^{-\frac{1}{\varepsilon}})}{2-3\varepsilon-\varepsilon e^{-\frac{2}{\varepsilon}}+4\varepsilon e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}e^{-\frac{2t}{\varepsilon}},$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} y(t,\varepsilon) = \alpha + \frac{2\gamma - 1 - 4\alpha}{2} + t = -\alpha + \gamma - \frac{1}{2} + t, 0 \prec t \le 1,$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} y'(t,\varepsilon) = 1, 0 < t \le 1.$$

Ал енді $\varepsilon = 0$ болған жағдайдағы сингулярлы ауытқымаған есепті қарастырамыз:

$$2\overline{y}' = 2$$

Бұдан $\overline{y}' = 1$ екені шығады. Бұл теңдеуді екі шартпен шешеміз,олар:

$$\overline{y}(0) = \alpha + \Delta_0, \qquad \overline{y}(1) - \int_0^1 [-\overline{y}(x) + \overline{y}'(x)]dx + \Delta_0$$

$$\overline{y}(t) = t + C$$

$$\overline{y}(t) = \alpha + \Delta_0 + t,$$

$$\overline{y}'(t) = 1$$

$$\alpha + \Delta_0 + 1 - \int_0^1 [-\alpha - \Delta_0 - x + 1]dx = \gamma + \Delta_0$$

$$\alpha + \Delta_0 + 1 + \alpha + \Delta_0 - 1 + \frac{1}{2} = \gamma + \Delta_0$$

$$2\Delta_0 = \gamma - \frac{1}{2} - 2\alpha + \Delta_0.$$

Бұдан шығатыны $\Delta_0 = \gamma - \frac{1}{2} - 2\alpha$. Онда

$$\overline{y}(t) = \alpha + \gamma - \frac{1}{2} - 2\alpha + t = -\alpha + \gamma - \frac{1}{2} + t.$$

Мысал 2

Келесі есепті қарастырамыз:

$$\varepsilon y'''(t,\varepsilon)+ay''(t,\varepsilon)=b+\int_0^1 \delta y''(x,\varepsilon)dx, \tag{2.1}$$

$$y(0,\varepsilon)=a_1,\; y'(0,\varepsilon)=a_2,\; y(1,\varepsilon)=b_1 \tag{2.2}$$

Белгілейік:

$$y''(t,\varepsilon)=z(t,\varepsilon),\; q=\int_0^1 y''(x,\varepsilon)dx.$$

Онда (2.1) теңдеуді келесі түрде жазамыз: $\varepsilon z' + az = b+\delta\cdot q$.

Бұдан келесі шешім аламыз.

$$z(t,\varepsilon)=\exp\left(-\frac{at}{\varepsilon}\right)\cdot\left[C+\int_0^t \frac{b+\delta\cdot q}{\varepsilon}\cdot\exp\left(\frac{at}{\varepsilon}\right)dt\right]=$$

$$=C\cdot\exp\left(-\frac{at}{\varepsilon}\right)+\frac{b+\delta\cdot q}{a}$$

Бұл табылған $z(t,\varepsilon)$ жоғарыдағы белгілеуге қоямыз:

$$y''(t,\varepsilon)=C\cdot\exp\left(-\frac{at}{\varepsilon}\right)+\frac{b+\delta\cdot q}{a}$$

Бұдан

$$q=\int_0^1\left[C\cdot\exp\left(-\frac{ax}{\varepsilon}\right)+\frac{b+\delta\cdot q}{a}\right]dx=-\frac{C\varepsilon}{a}\left(\exp\left(-\frac{a}{\varepsilon}\right)-1\right)+\frac{b+\delta\cdot q}{a}$$

аламыз, немесе

$$q-\frac{\delta\cdot q}{a}=\frac{b}{a}-\frac{C\varepsilon}{a}\left(\exp\left(-\frac{a}{\varepsilon}\right)-1\right)$$

Соңғы текдіктен

$$q=\frac{\frac{b}{a}-\frac{C\varepsilon}{a}\left(\exp\left(-\frac{a}{\varepsilon}\right)-1\right)}{1-\frac{\delta}{a}}=\frac{b-C\varepsilon\left(\exp\left(-\frac{a}{\varepsilon}\right)-1\right)}{a-\delta}$$

екендігі шығады. Олай болса

$$y''(t,\varepsilon)=C\cdot\exp\left(-\frac{at}{\varepsilon}\right)+\frac{b}{a}+\frac{\delta\left[b-C\varepsilon\left(\exp\left(-\frac{a}{\varepsilon}\right)-1\right)\right]}{a(a-\delta)}=$$

$$=C\cdot\exp\left(-\frac{at}{\varepsilon}\right)+\frac{b(a-\delta)+\delta\left[b-C\varepsilon\left(\exp\left(-\frac{a}{\varepsilon}\right)-1\right)\right]}{a(a-\delta)}=$$

$$=C\cdot\exp\left(-\frac{at}{\varepsilon}\right)+\frac{ab-C\varepsilon\cdot\delta\cdot\left(\exp\left(-\frac{a}{\varepsilon}\right)-1\right)}{a(a-\delta)}$$

Шеттік шарттарды қолданып,

$$y'(t,\varepsilon)-y'(0,\varepsilon)=\int_0^t C\cdot\exp\left(-\frac{ax}{\varepsilon}\right)+\frac{ab-C\varepsilon\cdot\delta\cdot\left(\exp\left(-\frac{a}{\varepsilon}\right)-1\right)}{a(a-\delta)}dx$$

$$y^{'}(t,\varepsilon)=a_2-\frac{C\varepsilon}{a}\left(\exp\left(-\frac{at}{\varepsilon}\right)-1\right)+\frac{ab-C\varepsilon\cdot\delta\cdot\left(\exp\left(-\frac{a}{\varepsilon}\right)-1\right)}{a(a-\delta)}\cdot t\,,$$

$$y(t,\varepsilon)-y(0,\varepsilon)=\int_0^t a_2-\frac{C\varepsilon}{a}\left(\exp\left(-\frac{ax}{\varepsilon}\right)-1\right)+x\cdot\frac{ab-C\varepsilon\cdot\delta\cdot\left(\exp\left(-\frac{a}{\varepsilon}\right)-1\right)}{a(a-\delta)}dx$$

$$y(t,\varepsilon)=a_1+a_2(t)+\frac{C\varepsilon^2}{a^2}\left(\exp\left(-\frac{at}{\varepsilon}\right)-1\right)+\frac{C\varepsilon}{a}t+$$

$$+\frac{ab-C\varepsilon\cdot\delta\cdot\left(\exp\left(-\frac{a}{\varepsilon}\right)-1\right)}{a(a-\delta)}\cdot\frac{t^2}{2}$$

аламыз. Енді белгісіз тұрақтыны табу үшін шекаралық шарттардың соңғысын пайдаланамыз. Сонда келесі теңдікті аламыз:

$$y(1,\varepsilon)=a_2+\frac{C\varepsilon^2}{a^2}\left(\exp\left(-\frac{a}{\varepsilon}\right)-1\right)+\frac{C\varepsilon}{a}+\frac{1}{2}\frac{ab-C\varepsilon\cdot\delta\cdot\left(\exp\left(-\frac{a}{\varepsilon}\right)-1\right)}{a(a-\delta)}=b_1\,,$$

$$C\left[\frac{\varepsilon^2\left(\exp\left(-\frac{a}{\varepsilon}\right)-1\right)}{a^2}+\frac{\varepsilon}{a}-\frac{1}{2}\frac{\varepsilon\cdot\delta\cdot\left(\exp\left(-\frac{a}{\varepsilon}\right)-1\right)}{a(a-\delta)}\right]=b_1-a_2-\frac{b}{2(a-\delta)}$$

Бұдан C коэффицентін табамыз:

$$C=\frac{\dfrac{2b_1(a-\delta)-2a_2(a-\delta)-b}{2(a-\delta)}}{\dfrac{\varepsilon^2\left(\exp\left(-\dfrac{a}{\varepsilon}\right)-1\right)}{a^2}+\dfrac{\varepsilon}{a}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\varepsilon\cdot\delta\cdot\left(\exp\left(-\dfrac{a}{\varepsilon}\right)-1\right)}{a(a-\delta)}}=$$

$$=\frac{a\cdot[2b_1(a-\delta)-2a_2(a-\delta)-b]}{\varepsilon^2\left(\exp\left(-\dfrac{a}{\varepsilon}\right)-1\right)\cdot(a-\delta)+2\varepsilon\cdot a(a-\delta)-a\delta\varepsilon\left(\exp\left(-\dfrac{a}{\varepsilon}\right)-1\right)}=$$

$$=\frac{a\cdot[2b_1(a-\delta)-2a_2(a-\delta)-b]}{-\varepsilon a\delta+2a^2\varepsilon-\varepsilon^2(a-\delta)+(\varepsilon^2-a\delta\varepsilon)\cdot\exp\left(-\dfrac{a}{\varepsilon}\right)}$$

екендігін табамыз. Енді табылған C коэффицентін шешімге апарып қоямыз:

$$y(t,\varepsilon)=a_1+a_2(t)+\frac{a\cdot[2b_1(a-\delta)-2a_2(a-\delta)-b]}{-\varepsilon a\delta+2a^2\varepsilon-\varepsilon^2(a-\delta)+(\varepsilon^2-a\delta\varepsilon)\cdot\exp\left(-\dfrac{a}{\varepsilon}\right)}\cdot\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^2\times$$

$$\times\left(\exp\left(-\frac{at}{\varepsilon}\right)-1\right)+\frac{a\cdot[2b_1(a-\delta)-2a_2(a-\delta)-b]}{-\varepsilon a\delta+2a^2\varepsilon-\varepsilon^2(a-\delta)+(\varepsilon^2-a\delta\varepsilon)\cdot\exp\left(-\dfrac{a}{\varepsilon}\right)}\cdot\frac{\varepsilon\cdot t}{a}+$$

$$+\frac{t^2}{2}\left[\frac{b}{(a-\delta)}-\frac{a\cdot[2b_1(a-\delta)-2a_2(a-\delta)-b]}{-\varepsilon a\delta+2a^2\varepsilon-\varepsilon^2(a-\delta)+(\varepsilon^2-a\delta\varepsilon)\cdot\exp\left(-\dfrac{a}{\varepsilon}\right)}\times\frac{\varepsilon\cdot\delta\cdot\left(\exp\left(-\dfrac{a}{\varepsilon}\right)-1\right)}{a(a-\delta)}\right],$$

$$y'(t,\varepsilon)=a_2-\frac{a\cdot\left[2b_1(a-\delta)-2a_2(a-\delta)-b\right]}{-\varepsilon a\delta+2a^2\varepsilon-\varepsilon^2(a-\delta)+\left(\varepsilon^2-a\delta\varepsilon\right)\cdot\exp\left(-\frac{a}{\varepsilon}\right)}\cdot\frac{\varepsilon}{a}\times$$

$$\times\left(\exp\left(-\frac{at}{\varepsilon}\right)-1\right)+t\cdot\left[\frac{b}{(a-\delta)}-\frac{\varepsilon\cdot\delta\cdot\left(\exp\left(-\frac{a}{\varepsilon}\right)-1\right)}{a(a-\delta)}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{a\cdot\left[2b_1(a-\delta)-2a_2(a-\delta)-b\right]}{-\varepsilon a\delta+2a^2\varepsilon-\varepsilon^2(a-\delta)+\left(\varepsilon^2-a\delta\varepsilon\right)\cdot\exp\left(-\frac{a}{\varepsilon}\right)}\right],$$

$$y''(t,\varepsilon)=\frac{a\cdot\left[2b_1(a-\delta)-2a_2(a-\delta)-b\right]}{-\varepsilon a\delta+2a^2\varepsilon-\varepsilon^2(a-\delta)+\left(\varepsilon^2-a\delta\varepsilon\right)\cdot\exp\left(-\frac{a}{\varepsilon}\right)}\cdot\exp\left(-\frac{at}{\varepsilon}\right)+$$

$$+\frac{b}{(a-\delta)}-\frac{a\cdot\left[2b_1(a-\delta)-2a_2(a-\delta)-b\right]}{-\varepsilon a\delta+2a^2\varepsilon-\varepsilon^2(a-\delta)+\left(\varepsilon^2-a\delta\varepsilon\right)\cdot\exp\left(-\frac{a}{\varepsilon}\right)}\times\frac{\varepsilon\cdot\delta\cdot\left(\exp\left(-\frac{a}{\varepsilon}\right)-1\right)}{a(a-\delta)}$$

Бұдан $y^{(i)}(0,\varepsilon)=O(1),\quad i=0,1,\quad y''(0,\varepsilon)=O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right),\quad \varepsilon\to 0$ екендігі көрінеді. Олай болса шекаралық есеп шешімінің қарастырып отырған кесіндінің сол жақ нүктесінде бірінші ретті бастапқы секірісінің бар екені шығады.

Мысал 3.

Келесі қос шекаралық қабатты шеттік есеп қарастырайық:

$$\varepsilon^2 y''' - \varepsilon y'' - 2y' = 1 + \delta \int_0^1 y'(x,\varepsilon)dx \qquad (3.1)$$

$$y(0,\varepsilon) = \alpha, \quad y'(0,\varepsilon) = \beta, \quad y(1,\varepsilon) = \gamma \qquad (3.2)$$

Бұл шекаралық есеп (1.1.1), (1.1.2) шекаралық есептің дербес жағдайы, мұндағы

$A_0(t) = -1, \quad A_1(t) = -2, \quad A_2(t) = 0, \quad F(t) = 1$, ал $H_0(t,x) = 0, \quad H_1(t,x) = \delta \equiv const.$

Біртекті дифференциалдық теңдеудің іргелі шешімдер жүйесі келесі түрде болады:

$$y_1(t,\varepsilon) = 1, \quad y_2(t,\varepsilon) = e^{-\frac{t}{\varepsilon}}, \quad y_3(t,\varepsilon) = e^{-\frac{2}{\varepsilon}(1-t)}.$$

$y_i(t,\varepsilon), \quad i = 1,2,3$ функциялар жүйесі арқылы вронскиан анықтауышын құрып, анықтауышты есептейміз:

$$W(t,\varepsilon) = -\frac{6}{\varepsilon^3} e^{-\frac{2-t}{\varepsilon}} \neq 0.$$

Енді Коши функциясын құрамыз:

$$K_0(t,s,\varepsilon) = \varepsilon^2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} e^{-\frac{t-s}{\varepsilon}} \right), \quad s \le t,$$

$$K_1(t,s,\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{6} e^{-\frac{2}{\varepsilon}(s-t)}, \quad t \le s.$$

Енді шекаралық функцияларды құрамыз:

$$\Phi_1(t,\varepsilon)=1+e^{-\frac{2}{\varepsilon}(1-t)},\quad \Phi_2(t,\varepsilon)=\varepsilon-\varepsilon e^{-\frac{t}{\varepsilon}}-\varepsilon e^{-\frac{2}{\varepsilon}(1-t)},\quad \Phi_3(t,\varepsilon)=e^{-\frac{2}{\varepsilon}(1-t)}.$$

Жоғарыдағы әдіс бойынша келесі белгілеуді енгіземіз:

$$z\equiv 1+\delta\int_0^1 y'(x,\varepsilon)dx=1+\delta\big(y(1,\varepsilon)-y(0,\varepsilon)\big)=1+\delta(\gamma-\alpha) \tag{3.3}$$

Құрылған Коши функциясының, шекаралық функциялардың және (3.3) формуланың көмегімен (3.1), (3.2) қос шекаралық қабатты шеттік есептің аналитикалық формуласын аламыз:

$$y(t,\varepsilon)=\frac{-\alpha\left(1+2e^{-\frac{3}{\varepsilon}}\right)+3e^{-\frac{2}{\varepsilon}}\gamma+\varepsilon\beta\left(e^{-\frac{3}{\varepsilon}}-1\right)+0{,}5\big(1+\delta(\gamma-\alpha)\big)\left[\varepsilon e^{-\frac{3}{\varepsilon}}+3e^{-\frac{2}{\varepsilon}}-\varepsilon\right]}{3e^{-\frac{2}{\varepsilon}}-2e^{-\frac{3}{\varepsilon}}-1}+$$

$$+\frac{2e^{-\frac{2}{\varepsilon}}(\alpha-\gamma)+\varepsilon\beta\left(1-e^{-\frac{2}{\varepsilon}}\right)+0{,}5\big(1+\delta(\gamma-\alpha)\big)\left[\varepsilon-\varepsilon e^{-\frac{2}{\varepsilon}}-2e^{-\frac{2}{\varepsilon}}\right]}{3e^{-\frac{2}{\varepsilon}}-2e^{-\frac{3}{\varepsilon}}-1}\cdot e^{-\frac{t}{\varepsilon}}+$$

$$+\frac{\alpha-\gamma+\varepsilon\beta\left(1-e^{-\frac{1}{\varepsilon}}\right)+0{,}5\big(1+\delta(\gamma-\alpha)\big)\left[\varepsilon-\varepsilon e^{-\frac{1}{\varepsilon}}-1\right]}{3e^{-\frac{2}{\varepsilon}}-2e^{-\frac{3}{\varepsilon}}-1}\cdot e^{-\frac{2}{\varepsilon}(1-t)}-0{,}5\big(1+\delta(\gamma-\alpha)\big)t,$$

$$y'(t,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{2e^{-\frac{2}{\varepsilon}}(\alpha-\gamma)+\varepsilon\beta\left(1-e^{-\frac{2}{\varepsilon}}\right)+0{,}5\big(1+\delta(\gamma-\alpha)\big)\left[\varepsilon-\varepsilon e^{-\frac{2}{\varepsilon}}-2e^{-\frac{2}{\varepsilon}}\right]}{3e^{-\frac{2}{\varepsilon}}-2e^{-\frac{3}{\varepsilon}}-1}\cdot e^{-\frac{t}{\varepsilon}}+$$

$$+\frac{2}{\varepsilon}\cdot\frac{\alpha-\gamma+\varepsilon\beta\left(1-e^{-\frac{1}{\varepsilon}}\right)+0{,}5\big(1+\delta(\gamma-\alpha)\big)\left[\varepsilon-\varepsilon e^{-\frac{1}{\varepsilon}}-1\right]}{3e^{-\frac{2}{\varepsilon}}-2e^{-\frac{3}{\varepsilon}}-1}\cdot e^{-\frac{2}{\varepsilon}(1-t)}-0{,}5\big(1+\delta(\gamma-\alpha)\big),$$

$$y''(t,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon^2}\cdot\frac{2e^{-\frac{2}{\varepsilon}}(\alpha-\gamma)+\varepsilon\beta\left(1-e^{-\frac{2}{\varepsilon}}\right)+0{,}5\big(1+\delta(\gamma-\alpha)\big)\left[\varepsilon-\varepsilon e^{-\frac{2}{\varepsilon}}-2e^{-\frac{2}{\varepsilon}}\right]}{3e^{-\frac{2}{\varepsilon}}-2e^{-\frac{3}{\varepsilon}}-1}\cdot e^{-\frac{t}{\varepsilon}}+$$

$$+\frac{4}{\varepsilon^2}\cdot\frac{\alpha-\gamma+\varepsilon\beta\left(1-e^{-\frac{1}{\varepsilon}}\right)+0{,}5\big(1+\delta(\gamma-\alpha)\big)\left[\varepsilon-\varepsilon e^{-\frac{1}{\varepsilon}}-1\right]}{3e^{-\frac{2}{\varepsilon}}-2e^{-\frac{3}{\varepsilon}}-1}\cdot e^{-\frac{2}{\varepsilon}(1-t)}.$$

Бұл формуладан $y(0,\varepsilon)=O(1),\quad y'(0,\varepsilon)=O(1),\quad y''(0,\varepsilon)=O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right),\quad \varepsilon\to 0,$

$y(1,\varepsilon)=O(1),\quad y'(1,\varepsilon)=O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right),\quad y''(1,\varepsilon)=O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right),\quad \varepsilon\to 0$ теңдіктерін аламыз.

Бұдан шығатын қорытынды: $t=0$ нүктесінде берілген есеп шешімінің бірінші ретті, ал $t=1$ нүктесінде нөлінші ретті бастапқы секірістері бар.

Енді (3.1), (3.2) шекаралық есепке сәйкес өзгертілген ауытқымаған есепті аламыз:

$$-2\bar{y}'=1+\delta\int_0^1\bar{y}'(x)dx+\Delta(t), \tag{3.4}$$

$$\bar{y}(0) = \alpha, \quad \bar{y}(1) = \gamma + \Delta_1, \tag{3.5}$$

мұндағы $\Delta(t) = -\delta \cdot \Delta_1$.

Өзгертілген ауытқымаған есептің жалпы шешімі келесі түрде болады:

$$\bar{y}(t) = \alpha - 0{,}5\left(1 + \delta(\gamma - \alpha)\right)t.$$

$y(t,\varepsilon), \quad y'(t,\varepsilon), \quad y''(t,\varepsilon)$ шешімі үшін келесі шектік көшу орындалады:

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon \to 0} y(t,\varepsilon) = \bar{y}(t), \quad 0 \le t \le 1, \\ &\lim_{\varepsilon \to 0} y'(t,\varepsilon) = \bar{y}'(t), \quad 0 < t < 1 \\ &\lim_{\varepsilon \to 0} y''(t,\varepsilon) = \overline{y''}(t), \quad 0 < t < 1. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Мысал 4.

3 мысалдағы қарастырылған қос шекаралық қабатты шеттік есептегі (3.6) шектік көшу бірқалыпты емес, сондықтан осы есеп үшін $O(\varepsilon)$ дәлдікпен бірқалыпты асимптотикалық шешім құрайық.

Ол үшін $N = 0$ деп аламыз:

$$y(t,\varepsilon) = \overline{y_0}(t,\varepsilon) + O(\varepsilon),$$

$$\overline{y_0}(t,\varepsilon) = y_0(t) + \varepsilon\left(w_0(\tau_1) + \varepsilon w_1(\tau_1)\right) + v_0(\tau_2) + \varepsilon v_1(\tau_1) + \varepsilon^2 v_2(\tau_2),$$

мұндағы $\tau_1 = \dfrac{t}{\varepsilon}, \quad \tau_2 = \dfrac{t-1}{\varepsilon}$.

$y_0(t)$ функциясы келесі түрдегі есептің шешімі болады:

$$-2y_0'(t) = 1 + \int_0^1 \delta \cdot y_0'(x)dx + \delta \cdot v_0(0),$$

$$y_0(0) = \alpha, \quad y_0(1) = \gamma - v_0(0).$$

Бұл шекаралық есептен $y_0(t), \quad v_0(0)$ функцияларын табамыз:

$$y_0(t) = \alpha - 0{,}5(1 + \delta(\gamma - \alpha))t,$$

$$v_0(0) = (\gamma - \alpha)(1 + 0{,}5\delta) + 0{,}5.$$

$w_0(\tau_1)$ функциясы келесі түрдегі есептің шешімі болады:

$$\dddot{w}_0(\tau_1) - \ddot{w}_0(\tau_1) - 2\dot{w}_0(\tau_1) = 0,$$

$$w_0(0) = -[\beta + 0{,}5(1 + \delta(\gamma - \alpha))],$$

$$\dot{w}_0(0) = [\beta + 0{,}5(1 + \delta(\gamma - \alpha))],$$

$$\ddot{w}_0(0) = -[\beta + 0{,}5(1 + \delta(\gamma - \alpha))].$$

Бұл есептің жалпы шешімі келесі түрде анықталады:

$$w_0(\tau_1) = -[\beta + 0{,}5(1 + \delta(\gamma - \alpha))]e^{-\tau_1}.$$

$v_0(\tau_2)$ функциясы келесі түрдегі есептің шешімі болады:

$$\dddot{v}_0(\tau_2) - \ddot{v}_0(\tau_2) - 2\dot{v}_0(\tau_2) = 0,$$

$$v_0(0) = (\gamma - \alpha)(1 + 0{,}5\delta) + 0{,}5,$$

$$\dot{v}_0(0) = 2[(\gamma - \alpha)(1 + 0{,}5\delta) + 0{,}5],$$

$$\ddot{v}_0(0) = 4[(\gamma - \alpha)(1 + 0{,}5\delta) + 0{,}5].$$

Бұл есептің жалпы шешімі келесі түрде анықталады:

$$v_0(\tau_2) = [(\gamma - \alpha)(1 + 0{,}5\delta) + 0{,}5]e^{2\tau_2}.$$

$y_1(t)$ функциясы келесі түрдегі есептің шешімі болады:

$$-2y_1'(t) = \delta[\beta + 0{,}5(1 + \delta(\gamma - \alpha))] + \int_0^1 \delta \cdot y_1'(x)dx + \delta \cdot v_1(0),$$

$$y_1(0) = \beta + 0{,}5(1 + \delta(\gamma - \alpha)), \quad y_1(1) = -v_1(0).$$

Бұл шекаралық есептен $y_1(t), \quad v_1(0)$ функцияларын табамыз:

$$y_1(t) = \beta + 0{,}5(1 + \delta(\gamma - \alpha)) \equiv const,$$

$$v_1(0) = -[\beta + 0{,}5(1 + \delta(\gamma - \alpha))].$$

$w_1(\tau_1)$ функциясы келесі түрдегі есептің шешімі болады:

$$\dddot{w}_1(\tau_2) - \ddot{w}_1(\tau_2) - 2\dot{w}_1(\tau_2) = 0, \quad \Phi_1(\tau_2) = 0,$$

$$w_1(0) = 0,$$

$$\dot{w}_1(0) = 0,$$

$$\ddot{w}_1(0) = 0.$$

Бұл есептің жалпы шешімі келесі түрде анықталады:

$$w_1(\tau_1) = 0.$$

$v_1(\tau_2)$ функциясы келесі түрдегі есептің шешімі болады:

$$\dddot{v}_1(\tau_2) - \ddot{v}_1(\tau_2) - 2\dot{v}_1(\tau_2) = 0, \quad P_1(\tau_2) = 0,$$

$$v_1(0) = -[\beta + 0,5(1 + \delta(\gamma - \alpha))],$$

$$\dot{v}_1(0) = -2[\beta + 0,5(1 + \delta(\gamma - \alpha))],$$

$$\ddot{v}_1(0) = -4[\beta + 0,5(1 + \delta(\gamma - \alpha))].$$

Бұл есептің жалпы шешімі келесі түрде анықталады:

$$v_1(\tau_2) = -2[\beta + 0,5(1 + \delta(\gamma - \alpha))]e^{2\tau_2}.$$

$y_2(t)$ функциясы келесі түрдегі есептің шешімі болады:

$$-2y_2'(t) = \int_0^1 \delta \cdot y_2'(x)dx + \delta \cdot v_2(0),$$

$$y_2(0) = 0, \quad y_2(1) = -v_2(0).$$

Бұл шекаралық есептен $y_2(t), \quad v_2(0)$ функцияларын табамыз:

$$y_2(t) = 0,$$
$$v_2(0) = 0.$$

$v_2(\tau_2)$ функциясы келесі түрдегі есептің шешімі болады:

$$\dddot{v}_2(\tau_2)-\ddot{v}_2(\tau_2)-2\dot{v}_2(\tau_2)=0,\quad P_2(\tau_2)=0,$$

$$v_2(0)=0,$$

$$\dot{v}_2(0)=0,$$

$$\ddot{v}_2(0)=0.$$

Бұл есептің жалпы шешімі келесі түрде анықталады:

$$v_2(\tau_2)=0.$$

Жоғарыдағы анықталған коэффициенттерді шешімнің формуласына қойып, (3.1), (3.2) қос шекаралық қабатты шеттік есеп үшін $O(\varepsilon)$ дәлдікпен бірқалыпты асимптотикалық шешімді табамыз:

$$y(t,\varepsilon)=\alpha-0{,}5(1+\delta(\gamma-\alpha))t-\varepsilon[\beta+0{,}5(1+\delta(\gamma-\alpha))]e^{-\frac{t}{\varepsilon}}$$

$$+[(\gamma-\alpha)(1+0{,}5\delta)+0{,}5]e^{-\frac{2(1-t)}{\varepsilon}}-$$

$$-2\varepsilon[\beta+0{,}5(1+\delta(\gamma-\alpha))]e^{-\frac{2(1-t)}{\varepsilon}}.$$

Бұл функция берілген есепті берілген дәлдікпен қанағаттандыратынына оңай көз жеткізуге болады.

Мысал 8.

Келесі сингулярлы ауытқыған дифференциалдық теңдеуді қарастырайық:

$$\varepsilon^2 y'''+3\varepsilon y''+2y'=\int_0^1 \delta y'(x)dx \tag{1.8.55}$$

$$y(0,\varepsilon)=\alpha, \quad y'(0,\varepsilon)=\beta, \quad y(1,\varepsilon)-\int_0^1 a_1 y'(x)dx=\gamma \tag{1.8.56}$$

(1.8.55), (1.8.56) есеп (1.1.1)-(1.1.2) есебіне сәйкес, яғни

$$A(t)=3,\ B(t)=2,\ C(t)=0, F(t)=0.$$

Оң жағын белгілесек

$$b=\int_0^1 y'(x)dx \tag{1.8.57}$$

Берілген сингулярлы ауытқыған дифференциалдық теңдеудің іргелі шешімдер жүйесін іздейміз:

$$\varepsilon^2\lambda^3+3\varepsilon\lambda^2+2\lambda=0$$

Келесі қосымша сипаттаушы теңдеу құрамыз:

$\mu^2+3\mu+2=0,$ **теңдеудің түбірлері** $\mu_1=-1, \mu_2=-2$

Берілген (1.8.55), (1.8.56) сәйкес біртекті дифференциалдық теңдеудің іргелі шешімдер жүйесі келесі түрде болады:

$$y_1(t,\varepsilon)=e^{-\frac{t}{\varepsilon}}, y_2(t,\varepsilon)=e^{-\frac{2t}{\varepsilon}}, y_3(t,\varepsilon)=1 \tag{1.8.58}$$

(1.8.58) формуланы пайдалана отырып (1.8.55), (1.8.56) сингулярлы ауытқыған дифференциалдық теңдеудің шешімінің формуласын аламыз:

$$y(t,\varepsilon) = C_1 e^{-\frac{t}{\varepsilon}} + C_2 e^{-\frac{2t}{\varepsilon}} + C_3 + \frac{\delta b}{2} t \qquad (1.8.59)$$

Есеп шешімінің туындылары келесі сипатта болады:

$$y'(t,\varepsilon) = -\frac{C_1}{\varepsilon} e^{-\frac{t}{\varepsilon}} - \frac{2C_2}{\varepsilon} e^{-\frac{2t}{\varepsilon}} + \frac{\delta b}{2} \qquad (1.8.60)$$

$$y''(t,\varepsilon) = -\frac{C_1}{\varepsilon^2} e^{-\frac{t}{\varepsilon}} - \frac{4C_2}{\varepsilon^2} e^{-\frac{2t}{\varepsilon}}$$

(1.8.60) формуланы (1.8.57)-ге пайдалансақ,

$$b = \int_0^1 [-\frac{C_1}{\varepsilon} e^{-\frac{x}{\varepsilon}} - \frac{2C_2}{\varepsilon} e^{-\frac{2x}{\varepsilon}} + \frac{\delta b}{2}] dx$$

аламыз. Сәйкес белгісіздерді біріктіріп, келесі өрнекті аламыз

$$b = \frac{2C_1(e^{-1/\varepsilon} - 1) + 2C_2(e^{-2\backslash\varepsilon} - 1)}{2-\delta} \qquad (1.8.61)$$

Енді белгілі (1.8.61) өрнекті (1.8.58), (1.8.59) өрнектеріне қоялық:

$$y(t,\varepsilon)=C_1e^{-\frac{t}{\varepsilon}}+C_2e^{-\frac{2t}{\varepsilon}}+C_3+\frac{\delta}{2}\frac{2C_1(e^{-1/\varepsilon}-1)+2C_2(e^{-2\backslash\varepsilon}-1)}{2-\delta}t$$

$$y'(t,\varepsilon)=-\frac{C_1}{\varepsilon}e^{-\frac{t}{\varepsilon}}-\frac{2C_2}{\varepsilon}e^{-\frac{2t}{\varepsilon}}+\frac{\delta}{2}\frac{2C_1(e^{-1/\varepsilon}-1)+2C_2(e^{-2\backslash\varepsilon}-1)}{2-\delta}$$

$$y''(t,\varepsilon)=-\frac{C_1}{\varepsilon^2}e^{-\frac{t}{\varepsilon}}-\frac{4C_2}{\varepsilon^2}e^{-\frac{2t}{\varepsilon}}$$

Ондай болса,

$$y(t,\varepsilon)=C_1\left(e^{-\frac{t}{\varepsilon}}+\frac{\delta(e^{-1/\varepsilon}-1)}{2-\delta}t\right)+C_2\left(e^{-\frac{2t}{\varepsilon}}+\frac{\delta(e^{-2/\varepsilon}-1)}{2-\delta}t\right)+C_3$$

(1.8.62)

$$y'(t,\varepsilon)=-\frac{C_1}{\varepsilon}\left(e^{-\frac{t}{\varepsilon}}-\frac{\delta\varepsilon(e^{-1/\varepsilon}-1)}{2-\delta}\right)-\frac{C_2}{\varepsilon}\left(2e^{-\frac{2t}{\varepsilon}}+\frac{\delta\varepsilon(e^{-2/\varepsilon}-1)}{2-\delta}\right)$$

$$y''(t,\varepsilon)=-\frac{C_1}{\varepsilon^2}e^{-\frac{t}{\varepsilon}}-\frac{4C_2}{\varepsilon^2}e^{-\frac{2t}{\varepsilon}}$$

Белгісіз коэффициенттерін (1.8.62) өрнекті (1.8.56) шартқа қою арқылы іздейміз:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = \alpha \\ C_1(\delta - 2 + \varepsilon\delta(e^{-1/\varepsilon} - 1)) + C_2(2\delta - 4 + \varepsilon\delta(e^{-2/\varepsilon} - 1)) = \varepsilon\beta(2 - \delta) \\ C_1(a_1(2-\delta) + (1-a_1)(2-\delta)e^{-1/\varepsilon} + \delta(1-a_1)(e^{-1/\varepsilon} - 1)) + \\ + C_2(a_1(2-\delta) + (1-a_1)(2-\delta)e^{-2/\varepsilon} + \delta(1-a_1)(e^{-2/\varepsilon} - 1)) + C_3(2-\delta) = \gamma(2-\delta) \end{cases}$$

(1.8.63)

Крамер әдісін пайдаланып, белгісіз $C_i,\ i = 1,2,3$ тұрақтыларды табамыз.

$$C_1 = \frac{(\alpha-\gamma)(2\delta - 4 - \varepsilon\delta) + \varepsilon\beta(a_1 - 2) + \varepsilon(2\beta(1-a_1) - \delta(\gamma-\alpha))e^{-2/\varepsilon}}{(2a_1 - 2)(2-\delta) + e^{-1/\varepsilon}(8 - 4\delta + 4\delta a_1 - 8a_1) + e^{-2/\varepsilon}(2\delta - 4 - 2\delta a_1 + 4a_1)}$$

$$C_2 = \frac{(\delta - 2 - \varepsilon\delta)(\gamma-\alpha) - \varepsilon\beta(2a_1 - 2) + \varepsilon(\delta(\gamma-\alpha) + 2\beta(1-a_1))e^{-1/\varepsilon}}{(2a_1 - 2)(2-\delta) + e^{-1/\varepsilon}(8 - 4\delta + 4\delta a_1 - 8a_1) + e^{-2/\varepsilon}(2\delta - 4 - 2\delta a_1 + 4a_1)}$$

(1.8.64)

$$C_3 = \alpha - \frac{(\alpha-\gamma)(\delta-2) + \varepsilon e^{-1/\varepsilon}(\delta(\gamma-\alpha) + 2\beta(\delta-2)(1-a_1))}{(2a_1 - 2)(2-\delta) + e^{-1/\varepsilon}(8 - 4\delta + 4\delta a_1 - 8a_1) + e^{-2/\varepsilon}(2\delta - 4 - 2\delta a_1 + 4a_1)} +$$
$$+ \frac{\varepsilon e^{-2/\varepsilon}(2\beta(2-\delta)(1-a_1) - \delta(\gamma-\alpha))}{(2a_1 - 2)(2-\delta) + e^{-1/\varepsilon}(8 - 4\delta + 4\delta a_1 - 8a_1) + e^{-2/\varepsilon}(2\delta - 4 - 2\delta a_1 + 4a_1)}$$

Енді (1.8.64) теңдікті (1.8.62)-ге қойсақ

$$y(t,\varepsilon)=\frac{(\alpha-\gamma)(2\delta-4-\varepsilon\delta)+\varepsilon\beta(2a_1-2)+\varepsilon(2\beta(1-a_1)-\delta(\gamma-\alpha))e^{-2/\varepsilon}}{(2a_1-2)(2-\delta)+e^{-1/\varepsilon}(8-4\delta+4\delta a_1-8a_1)+e^{-2/\varepsilon}(2\delta-4-2\delta a_1+4a_1)}\times$$

$$\times\left[e^{-t/\varepsilon}+\frac{\delta(e^{-1/\varepsilon}-1)}{2-\delta}t\right]+$$

$$+\frac{(\delta-2-\varepsilon\delta)(\gamma-\alpha)-\varepsilon\beta(2a_1-2)+\varepsilon(\delta(\gamma-\alpha)+2\beta(1-a_1))e^{-1/\varepsilon}}{(2a_1-2)(2-\delta)+e^{-1/\varepsilon}(8-4\delta+4\delta a_1-8a_1)+e^{-2/\varepsilon}(2\delta-4-2\delta a_1+4a_1)}\times$$

$$\times\left[e^{-2t/\varepsilon}+\frac{\delta(e^{-2/\varepsilon}-1)}{2-\delta}t\right]+\alpha-$$

$$-\frac{(\alpha-\gamma)(\delta-2)+\varepsilon e^{-1/\varepsilon}(\delta(\gamma-\alpha)+2\beta(\delta-2)(1-a_1))}{(2a_1-2)(2-\delta)+e^{-1/\varepsilon}(8-4\delta+4\delta a_1-8a_1)+e^{-2/\varepsilon}(2\delta-4-2\delta a_1+4a_1)}+$$

$$+\frac{\varepsilon e^{-2/\varepsilon}(2\beta(2-\delta)(1-a_1)-\delta(\gamma-\alpha))}{(2a_1-2)(2-\delta)+e^{-1/\varepsilon}(8-4\delta+4\delta a_1-8a_1)+e^{-2/\varepsilon}(2\delta-4-2\delta a_1+4a_1)} \tag{1.8.65}$$

$$y'(t,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}\frac{(\alpha-\gamma)(2\delta-4-\varepsilon\delta)+\varepsilon\beta(2a_1-2)+\varepsilon(2\beta(1-a_1)-\delta(\gamma-\alpha))e^{-1/\varepsilon}}{(2a_1-2)(2-\delta)+e^{-1/\varepsilon}(8-4\delta+4\delta a_1-8a_1)+e^{-2/\varepsilon}(2\delta-4-2\delta a_1+4a_1)}\times$$

$$\times\left[e^{-t/\varepsilon}+\varepsilon\frac{\delta(e^{-1/\varepsilon}-1)}{2-\delta}\right]-$$

$$-\frac{2}{\varepsilon}\frac{(\delta-2-\varepsilon\delta)(\gamma-\alpha)-\varepsilon\beta(2a_1-2)+\varepsilon(\delta(\gamma-\alpha)+2\beta(1-a_1))e^{-1/\varepsilon}}{(2a_1-2)(2-\delta)+e^{-1/\varepsilon}(8-4\delta+4\delta a_1-8a_1)+e^{-2/\varepsilon}(2\delta-4-2\delta a_1+4a_1)}\times$$

$$\times\left[e^{-2t/\varepsilon}+\varepsilon\frac{\delta(e^{-2/\varepsilon}-1)}{2-\delta}\right],$$

$$y''(t,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{(\alpha-\gamma)(2\delta-4-\varepsilon\delta)+\varepsilon\beta(2a_1-2)+\varepsilon(2\beta(1-a_1)-\delta(\gamma-\alpha))e^{-1/\varepsilon}}{(2a_1-2)(2-\delta)+e^{-1/\varepsilon}(8-4\delta+4\delta a_1-8a_1)+e^{-2/\varepsilon}(2\delta-4-2\delta a_1+4a_1)}e^{-t/\varepsilon}+$$

$$+\frac{4}{\varepsilon^2}\frac{(\delta-2-\varepsilon\delta)(\gamma-\alpha)-\varepsilon\beta(2a_1-2)+\varepsilon(\delta(\gamma-\alpha)+2\beta(1-a_1))e^{-1/\varepsilon}}{(2a_1-2)(2-\delta)+e^{-1/\varepsilon}(8-4\delta+4\delta a_1-8a_1)+e^{-2/\varepsilon}(2\delta-4-2\delta a_1+4a_1)}e^{-2/\varepsilon}$$

Бұдан

$$y(0,\varepsilon)=O(1),\, y'(0,\varepsilon)=O(1),\, y''(0,\varepsilon)=O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right),\quad \varepsilon\to 0$$

екендігі шығады. Онда (1.8.55), (1.8.56) сингулярлы ауытқыған шеттік есептің шешімі $t=0$ нүктесінде нөлінші ретті екінші дәрежелі бастапқы секіріске ие.

Ал енді $\varepsilon=0$ болған жағдайдағы сингулярлы ауытқымаған есепті қарастырамыз:

$$\begin{cases} 2\bar{y}'=\delta\int_0^1\bar{y}'(x)dx+\delta\Delta_0 \\ \bar{y}(0)=\alpha+\Delta_0,\quad \bar{y}(1)-\int_0^1 a_1\bar{y}'(x)dx=\gamma+a_1\Delta_0 \end{cases} \tag{1.8.66}$$

Оң жағын белгілеп алсақ,

$$b=\int_0^1\bar{y}'(x)dx \tag{1.8.67}$$

Онда

$$2\bar{y}' = \delta(b + \Delta_0)$$

$$\bar{y}' = \frac{\delta(b + \Delta_0)}{2}. \tag{1.8.68}$$

$$\bar{y}(t) = C + \frac{\delta(b + \Delta_0)}{2} t.$$

(1.8.68)–ді (1.8.67)–ге қою арқылы келесіні аламыз:

$$b = \int_0^1 \frac{\delta(b + \Delta_0)}{2} dx = b(1 - \frac{\delta}{2}) \Rightarrow b = \frac{\delta\Delta_0}{2 - \delta}. \tag{1.8.69}$$

Енді белгілі b– ны (1.8.68)–ге апарып қоямыз:

$$\bar{y}(t) = C + \frac{\delta\Delta_0}{2 - \delta} t \tag{1.8.70}$$

Шешімнің (1.8.70) түрінде екі белгісіз бар. Оларды табу үшін (1.8.70)–ті (1.8.66) шартқа апарып қоямыз. Нәтижесінде

$$C = \alpha + \Delta_0$$

Ал, бастапқы секіріс

$$\Delta_0 = \frac{(\gamma - \alpha)(2 - \delta)}{2(1 - a_1)}.$$

Ондай болса мына түрдегі шешімді аламыз:

$$\bar{y}(t) = \alpha + \frac{(\gamma-\alpha)(2-\delta)}{2(1-a_1)} + \frac{\delta(\gamma-\alpha)}{2(1-a_1)}t \tag{1.8.71}$$

Шекке көшсек

$$\lim_{\varepsilon\to 0} y(t,\varepsilon) = \alpha + \frac{(\alpha-\gamma)}{(2a_1-2)}\cdot\delta t - \frac{(\alpha-\gamma)(\delta-2)}{2a_1-2} \equiv \bar{y}(t),$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} y'(t,\varepsilon) = \frac{\delta(\gamma-\alpha)}{2(1-a_1)} \equiv \bar{y}'(t) \tag{1.8.72}$$

Мысал.

(1.8.55), (1.8.56) интегралды шеттік есеп шешімінің кіші параметр бойынша $O(\varepsilon)$ дәлдікпен бірқалыпты асимптотикалық жіктелуін құрайық.

Ол үшін (2.2.15) формуладан $N=0$ деп аламыз

$$y(t,\varepsilon)=\bar{y}_0(t,\varepsilon)+O(\varepsilon)$$
$$\bar{y}_0(t,\varepsilon)=y_0(t)+\omega_0(\tau)+\varepsilon\omega_1(\tau)+\varepsilon^2\varepsilon\omega_2(\tau)+O(\varepsilon)$$

мұндағы $\tau=\dfrac{t}{\varepsilon}$. 2–тараудағы ретпен белгісіз коэффициенттерді табамыз.
(2.1.8$_0$), (2.1.13$_0$) есебі бойынша

$$\begin{cases} 2y_0'=\int\limits_0^1 \delta y_0'(x)dx+\int\limits_0^\infty \delta\dot{\omega}_0(s)ds \\ y_0(0)=\alpha-\omega_0(0), \quad y_0(1)-\int\limits_0^1 a_1 y_0'(x)dx=\gamma+a_1\Delta_0 \end{cases}$$

Сәйкесінше белгілеулер енгізу арқылы (1.8.66) түріндегі ауытқымаған есеп түріне келеміз:

$$\begin{cases} 2y_0'=\int\limits_0^1 \delta y_0'(x)dx+\delta\Delta_0 \\ y_0(0)=\alpha+\Delta_0, \quad y_0(1)-\int\limits_0^1 a_1 y_0'(x)dx=\gamma+a_1\Delta_0 \end{cases} \qquad (2.2.28)$$

(2.2.28) шеттік есебінің шешімі келесі түрде болады:

$$y_0(t)=\alpha+\frac{(\gamma-\alpha)(2-\delta)}{2(1-a_1)}+\frac{\delta(\gamma-\alpha)}{2(1-a_1)}t$$

(2.1.9$_0$), (2.1.14$_0$) есебі бойынша

$$\begin{cases} \dddot{\omega}_0(\tau) + 3\ddot{\omega}_0(\tau) + 2\dot{\omega}_0(\tau) = 0, \\ \omega_0(0) = -\Delta_0, \\ \dot{\omega}_0(0) = 0, \\ \ddot{\omega}_0(0) = 2\Delta_0, \end{cases} \tag{2.2.29}$$

есебін аламыз. (2.2.29) есебінің шешімін келесі түрде іздейміз:

$$\omega_0(\tau) = C_1 + C_2 e^{-2\tau} + C_3 e^{-\tau} \tag{2.2.30}$$

(2.2.30) шешіміндегі белгісіз тұрақтыларды анықтау үшін (2.2.29) есебінің шарттарына бағындырып, белгісіз тұрақтыларды табымыз:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = -\Delta_0 \\ -2C_2 - C_3 = 0 \\ 4C_2 + C_3 = 2\Delta_0 \end{cases}$$

Жүйені шешу арқылы белгісіз тұрақтылардың айқын түрін аламыз:

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = \dfrac{(\gamma-\alpha)(2-\delta)}{2(1-a_1)} \\ C_3 = -\dfrac{(\gamma-\alpha)(2-\delta)}{(1-a_1)} \end{cases} \tag{2.2.31}$$

Нәтижеде (2.2.29) есебінің шешімін анықтаймыз:

$$\omega_0 = \frac{(\gamma-\alpha)(2-\delta)}{2(1-a_1)} e^{-2\tau} - \frac{(\gamma-\alpha)(2-\delta)}{(1-a_1)} e^{-\tau} \tag{2.2.32}$$

($2.1.9_1$), ($2.1.14_1$) есебі бойынша

$$\begin{cases} \dddot{\omega}_1(\tau) + 3\ddot{\omega}_1(\tau) + 2\dot{\omega}_1(\tau) = 0, \\ \omega_1(0) = -\Delta_1, \\ \dot{\omega}_1(0) = \beta - y'_0(0), \\ \ddot{\omega}_1(0) = 3(y'_0(0) - \beta) + 2\Delta_1 \end{cases} \tag{2.2.33}$$

есебін аламыз. (2.2.33) есебінің шешімін келесі түрде іздейміз:

$$\omega_1(\tau) = C_1 + C_2 e^{-2\tau} + C_3 e^{-\tau} \qquad (2.2.34)$$

(2.2.34) шешіміндегі белгісіз тұрақтыларды анықтау үшін (2.2.33) есебінің шарттарына бағындырып, белгісіз тұрақтыларды табымыз:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = -\Delta_1 \\ -2C_2 - C_3 = \beta - \dfrac{\delta(\gamma - \alpha)}{2(1 - a_1)} \\ 4C_2 + C_3 = 3\left(\dfrac{\delta(\gamma - \alpha)}{2(1 - a_1)} - \beta\right) + 2\Delta_1 \end{cases}$$

Жүйені шешу арқылы белгісіз тұрақтылардың айқын түрін аламыз:

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = \dfrac{\delta(\gamma - \alpha)}{2(1 - a_1)} - \beta + \Delta_1 \\ C_3 = -\dfrac{\delta(\gamma - \alpha)}{(1 - a_1)} + \beta - 2\Delta_1 \end{cases} \qquad (2.2.35)$$

Нәтижеде (2.2.33) есебінің шешімін анықтаймыз:

$$\omega_1 = \left(\frac{\delta(\gamma - \alpha)}{2(1 - a_1)} - \beta + \Delta_1 \right) e^{-2\tau} + \left(-\frac{\delta(\gamma - \alpha)}{2(1 - a_1)} + \beta - 2\Delta_1 \right) e^{-\tau} \qquad (2.2.36)$$

$(2.1.9_2)$, $(2.1.14_2)$ есебі бойынша

$$\begin{cases} \dddot{\omega}_2(\tau) + 3\ddot{\omega}_2(\tau) + 2\dot{\omega}_2(\tau) = 0, \\ \omega_2(0) = -\Delta_2, \\ \dot{\omega}_2(0) = -y'_0(0), \\ \ddot{\omega}_2(0) = 3y'_0(0) + 2\Delta_0, \end{cases} \qquad (2.2.37)$$

есебін аламыз. (2.2.37) есебінің шешімін келесі түрде іздейміз:

$$\omega_2(\tau) = C_1 + C_2 e^{-2\tau} + C_3 e^{-\tau} \qquad (2.2.38)$$

(2.2.38) шешіміндегі белгісіз тұрақтыларды анықтау үшін (2.2.37) есебінің шарттарына бағындырып, белгісіз тұрақтыларды табымыз:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = -\Delta_2 \\ -2C_2 - C_3 = -\dfrac{\delta(\gamma-\alpha)}{2(1-a_1)} \\ 4C_2 + C_3 = \dfrac{3\delta(\gamma-\alpha)}{2(1-a_1)} + 2\Delta_2 \end{cases}$$

Жүйені шешу арқылы белгісіз тұрақтылардың айқын түрін аламыз:

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = \dfrac{\delta(\gamma-\alpha)}{2(1-a_1)} + \Delta_2 \\ C_3 = -\dfrac{\delta(\gamma-\alpha)}{(1-a_1)} - 2\Delta_2 \end{cases} . \qquad (2.2.39)$$

Нәтижеде (2.2.37) есебінің шешімін анықтаймыз:

$$\omega_2 = \left(\frac{\delta(\gamma-\alpha)}{2(1-a_1)} + \Delta_2\right)e^{-2\tau} - \left(\frac{\delta(\gamma-\alpha)}{2(1-a_1)} + 2\Delta_2\right)e^{-\tau} \qquad (2.2.32)$$

Ондай болса,

$$\bar{y}_0(t,\varepsilon) = y_0(t) + w_0(\tau) + \varepsilon\omega_1(\tau) + \varepsilon^2\omega_2(\tau)$$

Сәйкесінше белгілі өрнектерді орнына қойсақ

$$\bar{y}_0(t,\varepsilon) = \alpha + \frac{(\gamma-\alpha)(2-\delta)}{2(1-a_1)} + \frac{\delta(\gamma-\alpha)}{2(1-a_1)}t + \frac{(\gamma-\alpha)(2-\delta)}{2(1-a_1)}e^{-2\frac{t}{\varepsilon}} - \frac{(\gamma-\alpha)(2-\delta)}{(1-a_1)}e^{-\frac{t}{\varepsilon}} +$$

$$+\varepsilon\left(\frac{\delta(\gamma-\alpha)}{2(1-a_1)} - \beta + \Delta_1\right)e^{-2\frac{t}{\varepsilon}} + \varepsilon\left(-\frac{\delta(\gamma-\alpha)}{2(1-a_1)} + \beta - 2\Delta_1\right)e^{-\frac{t}{\varepsilon}} +$$

$$+\varepsilon^2\left(\frac{\delta(\gamma-\alpha)}{2(1-a_1)} + \Delta_2\right)e^{-2\frac{t}{\varepsilon}} - \varepsilon^2\left(\frac{\delta(\gamma-\alpha)}{2(1-a_1)} + 2\Delta_2\right)e^{-\frac{t}{\varepsilon}}$$

Бұл соңғы өрнекпен берілген $\bar{y}_0(t,\varepsilon)$ функциясы (1.8.55), (1.8.56) интегралды шеттік есебінің $O(\varepsilon)$ дәлдікпен алынған асимптотикалық шешімі болады.